

魔方陣をつくる

芝浦工業大学 数理科学研究会

平成 27 年 11 月 6 日

※何か不明な点や計算ミス等がありましたら加筆修正しますので指摘をお願いします

制作: 佐藤 晶子

目次

1	用語解説	1
1.1	定和性	1
1.2	方陣の教え方	1
2	1次・2次・3次の魔方陣	2
2.1	1次方陣	2
2.2	2次方陣	2
2.3	3次方陣	3
3	魔方陣をつくる	4
3.1	奇数方陣	4
3.2	全偶数方陣	7
3.3	半偶数方陣	8

1 用語解説

定義 1.1 (魔方陣)

1 から始まる連続した異なる自然数を碁盤の目状に並べ、各行 (横方向)、各列 (縦方向)、および両対角線上の数の和をすべて相等しくしたものを魔方陣 (方陣, magic square) という。

また、各行、各列、および両対角線上の相当する部分に含まれる数字の個数が n である方陣を n 次魔方陣 (n 次方陣) という。 n を魔方陣の次数という。

方陣はある種の正方行列であるともいえる。

n^2 個の数 a_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$) を正方形に並べたもの :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

を n 次の正方行列、あるいは、単に n 次行列 (n -th matrix) といい、これを簡単に (a_{ik}) または大文字で、たとえば A と表す。このとき行列 $A = (a_{ik})$ を構成している n^2 個の数 a_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$) は、行列 A の要素 (element) と呼ばれる。また、 n 次行列の横列を行 (row)、縦列を列 (column) と呼ぶ。さらに、左上隅から右下隅への対角線を主対角線 (main diagonal)、右上隅から左下隅を結ぶ線を副対角線 (subdiagonal) と呼ぶ。

魔方陣は $n = 3$ 以上の次数について存在し、3 次方陣については 1 つしか存在しない。

1.1 定和性

定義 1.2 (n 次方陣の定和, 魔方陣定和)

魔方陣とは各行 (横方向)、各列 (縦方向)、および両対角線上の数の和をすべて相等しくしたものをいう。この相等しい数の和のことを定和といい、3 次方陣の定和は 15、4 次方陣の定和は 34、5 次方陣の定和は 65、 \dots というように、方陣の次数によって定和は変化していく。定和は次のように与えられる:

n 次方陣に含まれるすべての数 ($1 \sim n^2$) の和を S_n とする。 S_n は初項 1、末項 n^2 、項数 n^2 の等差数列の和であるから、

$$S_n = \frac{1}{2}n^2(n^2 + 1)$$

となる。ここで、各行 (各列) の要素の和が相等しいことから、各行、各列、および両対角線上の要素の定和 S は、 S_n を行 (列) の数 n で割れば良いことが分かる。即ち、

$$S = \frac{S_n}{n} = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

これが n 次方陣の定和 S を与える公式になる。

1.2 方陣の数え方

方陣の個数を数えるときには、回転 (rotation)・裏返し (reflexion) によって一致するものは同じ方陣と考える。

表 1: 方陣 (1)

2	9	4
7	5	3
6	1	8

表 2: 方陣 (2)

4	3	8
9	5	1
2	7	6

表 3: 方陣 (3)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

表 4: 方陣 (4)

6	7	2
1	5	9
8	3	4

表 5: 方陣 (5)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

表 6: 方陣 (6)

8	3	4
1	5	9
6	7	2

表 7: 方陣 (7)

6	1	8
7	5	3
2	9	4

表 8: 方陣 (8)

2	7	6
9	5	1
4	3	8

上記の表において, (1) を反時計回りに回転 (左に 90°) させることで (2) を得られる. (2) から (3), (3) から (4) も同様にして得られる. また, (1)~(4) の方陣を裏側から見たもの (中央縦軸に関して左右対称に移したもの) が (5)~(8) である.

このようにして, 上記の (1)~(8) の方陣はすべて同じものであると考える.

2 1次・2次・3次の魔方陣

2.1 1次方陣

1次方陣は, 1つのみ存在し, これ以外にはない. つまらない例であるため, 通常は魔方陣として含めないが, ここでは形を整えるために示した.

表 9: 1次方陣

1

2.2 2次方陣

2次方陣には空欄が $2 \times 2 = 4$ 個あり, 1, 2, 3, 4 のいずれかの数が入る. いま, 仮に 2次方陣が存在すれば, 次のように表せる.

表 10: 2次方陣

a	b
c	d

このとき,

$$a + b = a + d = a + c$$

$$b = d = c$$

となる. しかし b, d, c は異なる数であるから, $b = d = c$ を満たすような数は存在しない. したがって, 2次方陣の作成は不可能である.

2.3 3次方陣

3次の場合、空欄は $3 \times 3 = 9$ 個あり、ここに入るべき数は1~9の9個である。また、定和は15である。いま、仮に3次方陣が存在するならば、次のように表せる。

表 11: 3次方陣-1

a	p	b
s	m	q
d	r	c

ここから3次方陣が存在することを証明していく。はじめに、中央の数 m が1~9の平均値5であることを示す。

証明 2.1 いま、第2行と第2列と両対角線において各要素の和を作れば、この和の中に m 以外の数はちょうど1回だけ現れ、 m は4つの和のどれにも現れる。つまり、

$$\begin{aligned} 15 \times 4 &= (s + m + q) + (p + m + r) + (a + m + c) + (b + m + d) \\ &= 3m + (a + b + c + d + m + p + q + s + r) \\ &= 3m + (1 + 2 + \dots + 9) = 3m + 45 \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} 3m &= 15 \times 4 - 45 = 15 \\ m &= 5 \end{aligned}$$

となる。これで $m = 5$ が示せた。

次に、3次方陣の最小数1の入る場所について考える。1は m 以外の8カ所のいずれかの場所に入るわけだが、方陣の回転を考えると、2カ所として考えても支障はない。要するに、「1は d か r のどちらか」であると考えても問題はない。なぜならば、

- (1) 1を a, b, c に置くことは、 d に置くのと同じ
- (2) 1を p, q, s に置くことは、 r に置くのと同じ

だからである。したがって、 $d = 1$ の場合と $r = 1$ の場合を調べれば良い。

- $d = 1$ の場合

$d = 1$ とすると、定和は15であるから $b = 9$ となる。

ここで、 $1 + s + a = 1 + r + c = 15$ より $s + a = r + c = 14$ となり、2数の和が14となる組が2組必要である。ところが、残っている数で、2数の和が14になるものは、(6, 8)の1組しかない。ゆえに、 $d = 1$ のときに3次方陣を作成することは不可能である。

表 12: 3 次方陣-2

a	p	9
s	5	q
1	r	c

• $r = 1$ の場合

$r = 1$ とすると, 定和は 15 であるから $p = 9$ となる. また, 最下行の定和から, $d + c = 14$ となる. 2 数の和が 14 となる組は (6, 8) のみであるから, これが d, c に入る数である.

ここで 裏返しにした方陣は同一のものとみなすため, d, c をどちらの数にしても同じ方陣が完成する. よって, ここでは $d < c$ とし, $(d, c) = (6, 8)$ と定めても問題はない.

表 13: 3 次方陣-3

a	9	b
s	5	q
6	1	8

これによって, 両対角線の定和から $a = 2, b = 4$ が得られる. すると今度は列の定和から $s = 7, q = 3$ が決定する. これは確かに魔方陣としての封建を満たしている.

表 14: 3 次方陣-4

2	9	4
7	5	3
6	1	8

以上により, 回転・裏返しを考慮すれば 3 次方陣は 1 個のみ存在する.

3 魔方陣をつくる

3.1 奇数方陣

• ヒンズーの連続方式

正方形の最下行の中央に 1 を置き, 次の法則によって右斜下方に連続自然数を並べていけば (1 から順に自然数を空欄に埋めていけば) 奇数次の方陣が完成する. この方法は, ヒンズーの連続方式と呼ばれる.

- (i) 最下行にきたときは, 次の列の一番上に続け, そこからさらに右斜下方に進む.
- (ii) 最右列にきたときは, そのすぐ下の行の一番左の隅に続け, そこから順に右斜下方に進む.
- (iii) すでに数字の入っている目に出会ったときには, いま, 書いた数字のすぐ上に進み, そこからは右斜下方に続ける.

3 次方陣を例に実際に作成してみる.

1. まず, 最下行の中央に 1 をおく.
2. 次の数 2 は法則 (i) より隣の列の一番上に置く.
3. 次の数 3 は法則 (ii) より, 下の行の一番左に置く.
4. 次の数 4 は右斜下方へ置きたいが, すでにその場所には 1 が入っているため 4 を置くことはできない. よって法則 (iii) により, 3 の上の空欄に次の数 4 を置く.
5. 次の数 5, 6 は右斜下方の空欄へ順に入れていく.
6. 次の数 7 は法則 (i) より 4 のおいてある位置に置きたいが, 入れないので法則 (iii) より 6 の上に入れる. 次の数 8 は法則 (ii) より下の行の一番左の空欄に置く. 次の数 9 は法則 (i) より次の列の一番上に置く.

表 15: 連続方式 1

	1	

表 16: 連続方式 2

		2
	1	

表 17: 連続方式 3

		2
3		
	1	

表 18: 連続方式 4

4		2
3		
	1	

表 19: 連続方式 5

4		2
3	5	
	1	6

表 20: 連続方式 6

4	9	2
3	5	7
8	1	6

このようにして, 3 次方陣が完成した. 同様にして他の奇数次の方陣も作成することができる. 次に, ヒンズーの連続方式で作成した 5 次, 7 次の方陣を示しておく.

表 21: ヒンズー 5 次方陣

11	18	25	2	9
10	12	19	21	3
4	6	13	20	22
23	5	7	14	16
17	24	1	8	15

表 22: ヒンズー 7 次方陣

22	31	40	49	2	11	20
21	23	32	41	43	3	12
13	15	24	33	42	44	4
5	14	16	25	34	36	45
46	6	8	17	26	35	37
38	47	7	9	18	27	29
30	39	48	1	10	19	28

● 桂馬飛びの方法

正方形の最下行の中央に 1 を置き, 以下は次の法則によって連続自然数を左上方向に桂馬飛びに順次並べていく.

- (i) 第 1 行, 第 2 行に来たときはそのすぐ左の列の相当する場所に続け, そこからさらに, 左上方向に桂馬飛びに進む.
- (ii) 第 1 列に来たときは, 最右列の相当する場所に続け, そこからまた, 左上方向に桂馬飛びを続ける.
- (iii) すでに数字の入っている目に出会ったときには, いま書いた数字のすぐ上に進み, そこから, やはり左上方向に桂馬飛びを続ける.

3 次方陣を例に実際に作成してみる.

1. まず, 最下行の中央に 1 をおく.
2. 次の数 2 は左上方向に桂馬飛びをした場所 (斜め左前の 1 つ前) に入る.
3. 次の数 3 は, 法則 (i) より, 最右列の中央に入る.
4. 次の数 4 は同じく法則 (i) より, 1 の場所に入るが, すでに数が入っているため, 法則 (iii) より 3 の上に入る.
5. 次の数 5 は法則 (i) より, 1 の上に入る. 次の数 6 は法則 (i) より最下行の最左列に入る.
6. 次の数 7 は, 法則 (ii) より, 第 1 行の最右列に入りたいが, すでに 4 が入っているため, 6 の上に入る. 次の数 8 は, 法則 (i) より最下行の最右列に入る. 次の数 9 は, 第 1 行の中央に入る.

表 23: 桂馬飛び 1

	1	

表 24: 桂馬飛び 2

2		
	1	

表 25: 桂馬飛び 3

2		
		3
	1	

表 26: 桂馬飛び 4

2		4
		3
	1	

表 27: 桂馬飛び 5

2		4
	5	3
6	1	

表 28: 桂馬飛び 6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

このようにして, 3 次方陣が完成した. 同様にして他の奇数次の魔方陣も作成することができる. 次に, 桂馬飛びの方法で作成した 5 次, 7 次の方陣を示しておく.

表 29: 桂馬 5 次方陣

3	14	25	6	17
22	8	19	5	11
16	2	13	24	10
15	21	7	18	4
9	20	1	12	23

表 30: 桂馬 7 次方陣

4	19	34	49	8	23	38
45	11	26	41	7	15	30
37	3	18	33	48	14	22
29	44	10	25	40	6	21
28	36	2	17	32	47	13
20	35	43	9	24	39	5
12	27	42	1	16	31	46

3.2 全偶数方陣

- 書き下し法

両対角線部分に網をかける. その網掛け部分に, 左上隅から右へ順に 1, 2, 3, 4, ... と, 空所に当たるところは抜きながら入れていく. (書き下し法 1 の状態)

右下隅まで到達したら, 今度は右下から左へ順に 1, 2, 3, 4, ... と, 先ほど空所にしていたところだけに相当する数字を入れていく. (書き下し法 2 の状態)

表 31: 書き下し法 1

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

表 32: 書き下し法 2

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

これで 4 次方陣が完成した. 8 次方陣のときは, 4 次方陣が 4 つあるとみなしてその対角線上を網掛けする. その網掛け部分に, 左から順に 1, 2, ..., 64 の数字を相当するところのみ入れていく. 右下隅まで到達したら, 4 次方陣のときと同様に, 今度は右下隅から 1, 2, ... の数を空所に入れていく. このようにして 8 次方陣も完成する. 以下, 全偶数字の方陣についてはこれを適用し, 作成することができる.

表 33: 書き下し 8 次方陣-1

1			4	5			8
	10	11			14	15	
	18	19			22	23	
25			28	29			32
33			36	37			40
	42	43			46	47	
	50	51			54	55	
57			60	61			64

表 34: 書き下し 8 次方陣-2

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	24	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

3.3 半偶数方陣

- 自然配列交換法

全偶数の、書き下し法と同じ操作を行う。たとえば 6 次方陣ならば、

表 35: 自然配列 1

1	35	34	33	32	6
30	8	28	27	11	25
24	23	15	16	20	19
18	17	21	22	14	13
12	26	10	9	29	7
31	5	4	3	2	36

となる。6 次方陣の定和は 111 であるが、この表では各行・各列とも定和とは異なっている。

第 1 行 $\rightarrow 141(+30)$, 第 2 行 $\rightarrow 129(+18)$, 第 3 行 $\rightarrow 117(+6)$,

第 4 行 $\rightarrow 105(-6)$, 第 5 行 $\rightarrow 93(-18)$, 第 6 行 $\rightarrow 81(-30)$

第 1 列 $\rightarrow 116(+5)$, 第 2 列 $\rightarrow 114(+3)$, 第 3 列 $\rightarrow 112(+1)$,

第 4 列 $\rightarrow 110(-1)$, 第 5 列 $\rightarrow 108(-3)$, 第 6 列 $\rightarrow 106(-5)$

そこで、第 1 行と第 6 行、第 2 行と第 5 行、第 3 行と第 4 行の同列、また、第 1 列と第 6 列、第 2 列と第 5 列、第 3 列と第 4 列の同行にある 1 組の 2 数を交換する。その際、両対角線上の数を動かさなければ、2 数はどこをとっても良い。たとえば、次の表で同じ文字で示したところの数を交換したとすると、

表 36: 自然配列 2

	a	z		a	
x		b	b		
c	y				c
	y				
x					
		z			

表 37: 自然配列 3

1	32	4	33	35	6
12	8	27	28	11	25
19	17	15	16	20	24
18	23	21	22	14	13
30	26	10	9	29	7
31	5	34	3	2	36

表 38: 自然配列 4

	p				
s		q			s
	t			t	r
					r
		q			
	p	u	u		

表 39: 自然配列 5

1	5	34	33	32	6
25	8	10	27	11	30
24	20	15	16	23	13
18	17	21	22	14	19
12	26	28	9	29	7
31	35	3	4	2	36

となる. 10 次以上の方陣については, 4 つの小正方形の両対角線要素は動かさないようにして, その他の数は中心に関して対象の位置に移す. 次数が大きくなるにつれて, 動かす数字の組が増加するため, 作業は手数がかかるようになる.

- 外周追加法

全偶数方陣を核とし, これに外周を一回り追加することで, 半偶数方陣を作る.

6 次の場合について, 4 次の魔方陣の周りにひと側つけて 6 次の魔方陣を作る. この時, 外周は $1 \sim n^2$ までの数のうち, 初めの $2(n-1)$ 個と終わりの $2(n-1)$ 個を用いてつくる. つまり, 6 次の時には $1 \sim 10, 27 \sim 36$ までの数で外周を作る. したがって核となる 4 次方陣は, $11 \sim 26$ までの数で作る. これは, $1 \sim 16$ までの数で作った任意の 4 次方陣の各数に 10 を加えることで得られる.

よって, 外周の向かい合った 2 数は, 6 次方陣の定和 111 から 4 次方陣の定和 34 に各要素に足した 10 の分をを引いた, $(111 - 74 =) 37$ とする必要がある. 外周を作る際には, 外周の定和が 111 となることに注意する. たとえば, 次のような外周が作成できる.

表 40: 外周追加 1

1	34	33	32	9	2
6					31
10					27
30					7
29					8
35	3	4	5	28	36

核となる 4 次方陣は, たとえば, 次のものを用いるとする.

表 41: 外周追加 2

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

作った外周と 4 次方陣を組み合わせると, 次のような 6 次方陣が完成する.

表 42: 外周追加 3

1	34	33	32	9	2
6	11	25	24	14	31
10	22	16	17	19	27
30	18	20	21	25	7
29	23	13	12	26	8
35	3	4	5	28	36

4 次方陣を回転・裏返しにしたもの, 外周の並べ方を変えたものを組み合わせることで, 非常に多くの 6 次方陣が得られる. また, 個の方法を反復することにより, 任意の次数の半偶数方陣を作成することができる.

参考文献

- [1] 大森清美, 魔方陣の世界, 日本評論社, 2013 年